**Відповіді**

**до завдань ІІ етапу Всеукраїнської олімпіади з математики**

**2014-2015н.р.**

**6 клас**

1. **Риби зібрали подарунок для Русалочки – 1000 перлин. Кількість перлин принесених кожною рибкою можна записати числом, що в своєму записі містить лише цифру 5. Якщо скласти вираз у вигляді суми цих чисел то в записі суми нарахували 20 п’ятірок. Знайди скільки рибок привітали Русалочку?**

Розв’язання.  ( вісім доданків 55).

Відповідь . 10 риб.

1. **Два жуки змагаються з бігу на 50 м. Перший жук пробігає 1 м за 5 секунд, а другий – за 4,6 секунд. Після кожних 10 м жуки зупиняються на перепочинок. Перший – на 10 секунд, а другий – на 15 секунд. Визначте, який з жуків фінішуватиме першим.**

Відповідь. Одночасно.

1. **В одній казковій державі було 8 міст. З кожного міста в інші міста виходили по 4 дороги, які не перетинались між собою. Намалюйте карту цієї держави (міста позначте кружечками, а дороги відрізками).**



1. **На конюшні царя було троє коней: чорний, сивий і рябий. Гриви в них – біла, срібна і золота, а попони – червона, синя і зелена. Попона у сивого коня не червона, а у рябого – не синя. Кінь з зеленою попоною – білогривий, а в коня з червоною попоною грива не срібна, а в першого коня не золота. Яка грива і яка попона у кожного коня?**

Відповідь.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| масть | грива | попона |
| чорний | золота | червона |
| сивий | срібна | синя |
| рябий | біла | зелена |

1. **Діти стали в коло. Їм необхідно обрати головуючого для гри і вони рахують наступним чином: перший залишається в колі, наступний виходить з кола, третій залишається в колі, четвертий виходить і т.д.. Коло поступово зменшується до тих пір, поки в ньому не залишається тільки одна дитина. Визначте, хто саме залишається (на якому місці він стояв спочатку, рахуючи від першого за годинниковою стрілкою). Якщо спочатку стояло в колі 128 дітей.**

Розв’язання. Після того, як з кола вийдуть 64 дітей і відлік знову почнемо з першого. Теж саме повториться знову: вийдуть ще 32 дітей і відлік знову почнеться з першого. Пройшовши ще декілька разів по колу, переконаємося, що залишиться перший.

**Другий етап Всеукраїнської олімпіади юних математиків**

**2014-2015 н.р.**

**7 клас**

1. **В квадраті замальована його четверта частина (як показано на малюнку). Розділити не замальовану частину на чотири частини рівні за формою та розмірами.**

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |

**Відповідь. **

1. **Ліспромгосп вирішив вирубати сосновий ліс, але екологи рішуче виступили проти цього. Тоді директор лісгоспу всіх заспокоїв, сказавши: «У вашому лісі  сосен. Ми будемо рубати тільки їх, причому після рубки сосон залишиться  від всіх дерев». Яку частину лісу має намір вирубати ліспромгосп?**

Розв’язання. Оскільки спочатку інших дерев був 1%, а після рубки сосен їх мало стати 2%, то загальна кількість дерев зменшилась вдвічі. Отже, лісгосп має намір вирубати половину лісу.

1. **На дорозі між двома гірськими селами горизонтальних дільниць немає. Автобус вгору їде зі швидкістю 15 км/год, а вниз – 30 км/год. Яка відстань між селами, якщо відомо, що шлях туди і назад автобус проїздить за 4 години?**

Розв’язання. Зрозуміло, що загальна довжина як підйомів, так і спусків на маршруті туди і назад дорівнює відстані між селами, яку позначимо через (км), тоді , (км).

Відповідь. 40 км.

1. **Діти стали в коло. Їм необхідно обрати головуючого для гри і вони рахують наступним чином: перший залишається в колі, наступний виходить з кола, третій залишається в колі, четвертий виходить і т.д.. Коло поступово зменшується до тих пір, поки в ньому не залишається тільки одна дитина. Визначте, хто саме залишається (на якому місці він стояв спочатку, рахуючи від першого за годинниковою стрілкою). Якщо спочатку стояло в колі  дітей.**

Розв’язання. Після того, як з кола вийдуть  дітей і відлік знову почнемо з першого. Теж саме повториться знову: вийдуть ще дітей і відлік знову почнеться з першого. Пройшовши ще декілька разів по колу, переконаємося, що поступово кількість дітей зменшується :  .

Залишиться перший.

1. На площині дано 6 точок, жодні три з яких не лежать на одній прямій. Будь-які дві точки з’єднано відрізком, який зафарбовано в один з двох кольорів: червоний або синій. Доведіть, що знайдеться трикутник з вершинами в даних точках, всі сторони якого мають однаковий колір.

Відповідь. Використати принцип Діріхле.

**Другий етап Всеукраїнської олімпіади юних математиків**

**2014-2015 н.р.**

1. **клас**
2. **Металеву плитку розмірами**  **обвели олівцем на папері. Знайти центр отриманого прямокутника, маючи в розпорядженні тільки дану плитку і олівець.**

Розв’язання. Один із способів: на довших сторонах прямокутника з кінців за допомогою плитки відкладаємо відрізки довжиною 19 . І тоді проводимо діагоналі отриманого прямокутника з розмірами  ( на основі нерівності трикутника) довгої сторони плитки вистачає. Діагоналі перетнуться в центрі даного прямокутника.

1. **На дошці були записані перші 20 натуральних чисел. Одне з них стерли, і виявилось, що серед 19 чисел, що залишилось є число, рівне середньому арифметичному цих 19 чисел. Яке число стерли?**

Розв’язання. Сума чисел що залишиться має ділитися на 19. Мінімальне значення суми, що залишиться рівне , а максимальне значення - . З чисел 190, … , 209 кратними 19 будуть тільки 190 і 209. Отже, з дошки могли стерти 1 або 20.

Відповідь. 1 або 20.

1. **Доведіть, що існує 2014 послідовних натуральних чисел усі з яких складені.**

Розв’язання:

Розглянемо число А= 2\*3\*4\*5\*….\*2015. Дане число кратне кожному із чисел: 2,3,4,5,…2015. Тоді числа: А1=А+2, А2=А+3, А3=А+4,…А2014=А+2015 , теж натуральні та послідовні , при цьому

 А1 кратне 2 , А2 кратне 3 , А3 кратне 4 ,…., А2014 кратне 2015,отже усі ці послідовні натуральні числа складені.

1. **Числа р, р2+2- прості. Доведіть , що р3+2 теж просте.**

Розв’язування :

Число р при ділені на 3 може мати остачі : 0;1;2. Отже, можливі наступні рівності р=3к, р=3к+1,р=3к+2,де кϵN.

Якщо р=3к+1, то р2+2=9к2+6к+3=3(3к2+2к+1)- кратне трьом ,отже є складене.

Якщо р=3к+2, то р2+2=9к2+12к+6=3(3к2+4к+2)- кратне трьом, отже є складене.

Умову р2+2-просте, задовольняє р=3к і оскільки р – просте , то к=1. Отже,р=3. Тоді р3+2=33+2=29 – просте число.

1. **Відомо, що існує число а при якому а2+а+1=0, знайдіть значення виразу: **

Розв’язування :

Якщо а2+а+1=0, то (а-1)( а2+а+1)=0, отже а3-1=0,тому існує аǂ1, при якому а3=1, тоді .

Відповідь: 1.

**Другий етап Всеукраїнської олімпіади юних математиків**

**2014-2015 н.р.**

**9 клас**

1. **Знайдіть тринадцять довільних цілих чисел, якщо вони існують, (можливо однокових) сума квадратів яких становить 2014.**

Розв’язання :

Припустимо, що такі числа існують , позначимо їх: а1, а2, …а13. Оскільки а21≡(0;1)(mod16), a22≡(0;1)(mod16)….a213≡(0;1)(mod16) , то а21+a22+…+a213≡(0;1;2;3;…13)(mod16).

2014≡14(mod16), тому таких цілих чисел не існує.

1. **Петрусь виписав на дошці 2015 зведених квадратних рівнянь і перевірив, що жодне з них на має дійсних коренів. Потім він додав усі ці рівняння. Доведіть, що і одержане в результаті рівняння також не має дійсних коренів.**

Розв’язання. Оскільки рівняння не мають дійсних коренів, а коефіцієнти при  додатні, то для всіх дійсних  їх ліві частини набувають лише додатних значень. Зрозуміло, що аналогічну властивість матиме і ліва частина рівняння, одержаного в результаті додавання. А отже, воно також не матиме дійсних коренів.

1. **Побудуйте графік функції **

Розв’язання. ОДЗ: 

Розглянемо два випадки:

Якщо ,

то 

Якщо 

то 

1. **Бісектриса і висота прямокутного трикутника , що проведенні з вершини прямого кута, рівні відповідно 5см, 4см. Обчисліть площу даного прямокутного трикутника .**

Розв’язання :

На рисунку 1. ΔАВС , СН- висота, СІ – бісектриса. Тоді, за Т. Піфагора,

 НІ =3см. СМ – медіана трикутника АВС . Позначимо ﮮ АВС=α ,

тоді ﮮВАС=900-α. Оскільки АМ=СМ ,то ﮮАСМ= ﮮМАС=900-α. Так , як СН ﬩АВ ,то ﮮВСН=900-α. Отже ﮮМСІ=ﮮНСІ=450-( 900-α)=α-450. СІ – бісектриса ΔМСН, тому , отже  Оскільки, , то позначивши , отримаємо: , . Отже , СМ=100/7, а ВА=200/7см. (см2).



1. **Навколо поляни стоять 12 будинків, пофарбованих в білий і червоний колір, в яких поселились 12 гномів. У кожного гнома непарна кількість друзів. В січні перший гном фарбує свій будинок в той колір, в який пофарбовані будинки більшості його друзів. В лютому це ж робить другий ( за годинниковою стрілкою) гном, в березні - третій і т.д. Доведіть, що через декілька років колір будинку у кожного гнома буде оставатися одним і тим самим.**

Розв’язання. Розглянемо число пар гномів-друзів, у яких будинки різного кольору. Кожний місяць їх кількість збільшується. Дійсно, якщо наступний гном фарбує будинок в той самий колір, який був раніше, то це число зберігається. Якщо ж він фарбує будинок в інший колір, то воно зменшується. Оскільки це ціле число – невід’ємне то при зменшуванні наступить момент після якого воно не буде змінюватись. З даного моменту кожний гном завжди буде фарбувати будинок в один і той же колір.

**Другий етап Всеукраїнської олімпіади юних математиків**

**2014-2015 н.р.**

**10 клас**

1. **У квадратному тричлені ах2+ bх + с , дозволено замінювати кожен коефіцієнт сумою, або різницею двох інших. Чи можна таким чином із многочлена 2х2-5х-12 отримати многочлен дискримінант якого 23?**

Розв’язання: У многочлена 2х2-5х-12 коефіцієнти є цілими числами, тому їх сума або різниця теж цілі числа. Отже, в отриманого таким чином, квадратному тричлені ах2+ bх + с коефіцієнти цілі числа. Тому в2≡(0;1)(mod4), 4ac≡0(mod4) , D=b2-4ac≡(0;1)(mod4), а 23≡3(mod4). Отже, отримати дискримінант рівний 23, не можливо.

Відповідь : не можливо.

1. **Над декількома озерами пролітала зграя білих гусей. На кожному озері сідала половина гусей і «ще пів гуся», а інші летіли далі. Всі гуси сіли на семи озерах. Скільки гусей було в зграї?**

Розв’язання.. Нехай летіло  - гусей. Тоді, на першому озері сіло  гусей, на другому гусей , і т.д.

Отримаємо рівняння: ,

, .

Відповідь. 127

1. **У рівнобедреному трикутнику  бісектриса ділить бічну сторону у відношенні  Знайти відстань між точкою перетину медіан і точкою перетину бісектрис цього трикутника, якщо його периметр дорівнює 32.**

Розв’язання.

Проведемо медіану ВК та бісектрису АD. Нехай М – точка перетину медіан трикутника і точка О – перетин бісектрис. Використаємо властивість бісектриси трикутника: 

Нехай - коефіцієнт пропорційності. Отже, 

Знаючи, що периметр 32, отримаємо і 

 .

З  за властивістю бісектриси маємо:    звідси 

 Отже 

1. **Для додатних чисел  доведіть нерівність:**

**.**

**При яких значеннях досягається рів**ність?

Розв’язання:

Скористаємося нерівністю Коші , , звідси , яка справджується для довільних . Рівність досягається, при .

Тоді , .

Якщо додати цю та ще дві аналогічні нерівності, то отримаємо шукану нерівність.

Для виконання рівності повинні одночасно виконуватись умови ,  та , що неможливо.

 Відповідь: рівність досягатись не може.

1. **У тридев'ятому королівстві кожні два міста з'єднані дорогою з одностороннім рухом. Довести, що існує місто, з якого в будь-яке інше можна проїхати не більш як двома дорогами.**

**Розв'язання**. Позначимо за А місто, з якого виходить найбільша кількість доріг. Доведемо методом математичної індукції по кількості n міст королівства, що з міста А можна проїхати в будь-яке інше місто не більш як двома дорогами.

База індукції при n = 1, 2, 3 очевидна.

Припустимо, що при кількості міст n при будь-якому виборі на­прямків доріг між містами з міста А можна проїхати не більш як дво­ма дорогами в будь-яке інше місто королівства.

Нехай тепер кількість міст дорівнює n + 1. Якщо з А є пряма дорога в усі міста королівства, то нічого доводити не треба. У протилежному випадку нехай В - місто, дорога з якого веде в А. Тоді, за припущен­ням, з міста А можна проїхати не більш як двома дорогами в будь-яке інше місто королівства, крім міста В. Можливі випадки:

1) існує місто С, відмінне від міст А, В, дорога з якого веде в місто А. Тоді, відкинувши з розгляду місто С, отримуємо за припу­щенням, що з міста А в місто В можна проїхати не більш як дво­ма дорогами;

2) такого міста С не існує. Тоді в місто А входить лише дорога з мі­ста В, а тому, навіть відкинувши з розгляду довільне місто Р≠С, залишається справедливим твердження про те, що з міста А виходить найбільша кількість доріг. Тоді за припущенням з міста А в місто В можна проїхати не більше як двома дорогами

**Другий етап Всеукраїнської олімпіади юних математиків**

**2014-2015 н.р.**

**11 клас**

1. **Натуральні числа х, у, z - розв’язки системи рівнянь ,** **Знайдіть найменшу кількість дільників числа А, де А= хуz .**

Розв’язування:

  тоді 

Оскільки х,у, z натуральні і 2у3=3z5, отже у3 кратне трьом та двом, і z5 кратне двом та трьом, х2=2у3 , отже х2 кратне трьом і двом. Тому х,у,z кратні двом і трьом. Очевидно, що число А матиме найменшу кількість дільників якщо, де n, m, p , l, e, f задовольняють систему:

 Оскільки n , m, p, l, e, f - мінімальні натуральні числа, що задовольняють систему, то n=5 , e=2, p=3, m=3, e=2, f=1. Тому х=25\*33,у=23\*32, z= 22\*3. Отже : А= хуz=210\*36, тому кількість дільників числа А становить 11\*7=77.

Відповідь: найменша кількість дільників -77 .

1. **У двох будинках більше 31 квартири. Число квартир в 1 будинку збільшили на 21, що більш ніж в 3 рази перевищує число квартир у другому будинку. Подвоєне число квартир в першому будинку менше потроєного числа квартир у другому, але збільшеного на 1. Скільки квартир у кожному будинку?**

**Розв’язання.** Нехай у першому будинку *х* квартир, тоді у другому *у* квартир.



Модель даної задачі – система нерівностей х, у *Є* N.

*І спосіб (алгебраїчний)*

Виразимо у цій системі спочатку *х* через *у*, а тоді *у* через *х*.

 (1)  (2)

Утворимо з даних систем там, де можливо подвійні нерівності. Спочатку з (1): , тому  (\*)

Аналогічно з (2): 

Використаємо транзитивність:  (\*\*)

Із (\*) слідує 

Із (\*\*) слідує 

Але х, у *Є* N, тоді х = 19; 20; 21; а у = 13; 14.

Як вже говорилося, якщо модель має більше одного розв’язку, то їх треба перевіряти.

Перевіримо всі можливі варіанти по відношенню до складової моделі даної задачі.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | І умова | ІІ умова | ІІІ умова |  |
| (19; 13) | + | + | + |  |
| (20; 13) | + | + | - |  |
| (21; 13) | + | + | - |   |
| (20; 14) | + | - |  |  не є розв’язком |
| (21; 14) | + | - |  |  |
| (19; 14) | + | - |  |  |

Відповідь: у першому будинку 19 квартир, у другому 13.

*ІІ спосіб (графічний)*

Запишемо модель даної задачі

 

Зобразимо розв’язок кожної нерівності у системі координат.

 у  В

 31

 А 

 С

 7

 0 х

 

Знаходимо координати А, як точки перетину двох графіків:

,

х=18, у=13, А(18; 13).

Точки В: , х = 22, у = , В(22; ).

Точки С: 

С(;).

Для всіх заштрихованих точок ХА < Х < ХВ, УС < У < УВ



х = 19; 20; 21

у = 13; 14.

Далі рішення аналогічне до першого способу.

1. **У рівнобедреному трикутнику** **бісектриса** **ділить бічну сторону у відношенні**  **Знайти відстань між точкою перетину медіан і точкою перетину бісектрис цього трикутника, якщо його периметр дорівнює 32.**

Розв’язання.

Проведемо медіану ВК та бісектрису АD. Нехай М – точка перетину медіан трикутника і точка О – перетин бісектрис. Використаємо властивість бісектриси трикутника: 

Нехай - коефіцієнт пропорційності. Отже, 

Знаючи, що периметр 32, отримаємо і 

 .

З  за властивістю бісектриси маємо:    звідси 

 Отже 

1. **Знайдіть значення параметра а при якому нерівність:**

 **(а-1)х2+2ах+3а-2˃0,виконується при всіх х˃-0,5.**

Розв’язання:

І) Якщо а=1,то отримаємо нерівність 2х+1˃0,яка виконується при х˃-0,5.

ІІ) Якщо а≠1,то маємо нерівність другого степеня. Розглянемо можливі випадки:

а) а-1˂0,тоді розв’язки нерівності,якщо вони існують, це відрізок (х1;х2), який не містить розв’язку нерівності: х˃-0,5.

в) а-1˃0, тоді розв’язки нерівності, це проміжки (-∞;х1),та (х2;+∞), або R, які можуть містити в собі х˃-0,5, якщо -0,5розташоване праворуч нулів функції f(х)= (а-1)х2+2ах+3а-2. Отже нерівність:

 (а-1)х2+2ах+3а-2˃0, виконується при всіх х˃-0,5 , якщо ,

де f(х)= (а-1)х2+2ах+3а-2.

 Отже  , звідси а˃1.

Враховуючи І) та ІІ) отримаємо а≥1.

Відповідь: а≥1.

1. **Доведіть нерівність**  **для всіх натуральних n.**

**Розв’язання:**

Використаємо метод математичної індукції:

База n=1, тоді 1≤3-2.

Крок індукції . Припустимо, що твердження задачі справедливе, при n=k  Доведемо його справедливість, при n=k+1.

 Враховуючи припущення, отримаємо:  Доведемо нерівність:



Виконується при натуральних значеннях к.

 Оскільки, при натуральних значеннях к маємо,що, то  , тому

 .

За принципом математичної індукції, нерівність  правильна для довільного натурального n.