***Розв'язання завдань І туру***

***ІV Інтернет-олімпіади 2013-2014 н.р.***

***11 клас***

***1. Розв’язати рівняння: де  та  є відповідно дробова та ціла частина числа .***

Розв’язання. Зауважимо, що , тобто , а тому 0 звідси. Розглянемо два випадки:

1)  . Тоді  і рівняння набуває вигляду:  або . Звідси  або . Отже, .

2) .. Тоді  і рівняння набуває вигляду: ,. Звідси , тобто .

ВІДПОВІДЬ. , .

 2**. Про ціле число *n* та просте число *p* відомо, що числа *5n-1* та *n-10* діляться на *р.* Встановити, чи ділиться на *p* число *2000n+13?***

Розв’язання. Якщо *5n-1* ділиться на *p*, та *n-10* діляться на *р,* то і на *p*, очевидно, ділиться вираз: (*5n-1)-5(n-10)=49*. А оскільки 49 розкладається на добуток простих множників: 49=7\*7, то p=7. Тепер, оскільки  та доведемо, що і . Очевидно, що число , тоді . З останньої рівності випливає, що, тобто .

ВІДПОВІДЬ . Ділиться.

 **3. Чи є періодичною функція ?**

Розв’язання. Припустимо, що існує число , для якого при довільних  виконується:

**** . Підставивши  дістанемо рівняння: ****

Маємо сукупність систем: ****. У першому випадку отримаємо систему **,** де  цілі числа, що не дорівнюють нулю, тому , а це неможливо, бо  є ірраціональним числом. Аналогічно розглядається і друга система і доводиться, що дана в умові функція не є періодичною.

ВІДПОВІДЬ. Функція не є періодичною.

**4. В урні 90 номерів, записаних на аркушах паперу. Кожен учасник лотереї платить 1 гривню та виймає з урни 5 номерів. Перед вийманням він записує три задумані номери. Якщо серед витягнутих номерів будуть три задумані, то учасник виграє 500 гривень. Чи є ця лотерея виграшною для учасника?**

Розв’язання. Загальна кількість ймовірних результатів здобування 5 білетів з 90 . Витягнути ж три виграшні номери з трьох та два невиграшні з 90-3=87 можна способами. Звідси ймовірність виграшу становить: . Це означає, що середній виграш гравців у лотерею дорівнює:  копійок. І **гра є невиграшна** для учасників.

ВІДПОВІДЬ. Гра невиграшна для учасників.

**5.** **Про дійсні числа , ,  відомо, що вони належать інтервалу  і , , . Доведіть, що .**

*Розв’язання.* Скористаємося формулою: . Тому, виконуються рівності: , , . Оскільки числа ,  і  належать інтервалу , то числа , ,  також належать цьому інтервалу. Тому, з рівності косинусів випливає рівність їх аргументів, тобто , , . Звідси й випливає, що , що і треба було довести.

**6. Через вершину *B1* куба *ABCDA1B1C1D1* проведено площину, що перетинає ребра *BC* і *AB* і утворює з гранню *ABCD* кут  так, що в перерізі утворюється рівнобедрений трикутник. Знайти площу перерізу, якщо ребро куба *a*.**

Розв’язання. Слід розглянути два випадки:

С

D

A

B

M

N

K

A1

B1

C1

D1

1) , тоді  і   , тобто . .

С

D

A

B

M

K

A1

B1

C1

D1

N

2) , але  (за гіпотенузою і катетом). Тоді , тобто точки  і  співпадають. Проведемо , тоді . Нехай , , .

 , тоді 

 

 .

ВІДПОВІДЬ:  або .

**8. Попарно різні дійсні числа  задовольняють умову . Знайдіть, яких значень може набувати добуток ?**

Розв’язання. З першої рівності знаходимо  або . Аналогічно  та . Маємо: . Оскільки числа  різні, то одержимо, що , тобто . Покажемо, що існують числа, для яких обидва значення досягаються.

Виберемо , тоді для визначення  маємо таку систему рівнянь:  та . З першого рівняння маємо    або . Це рівняння має корені  та . Друге значення треба відкинути, оскільки за умовою числа попарно різні, тому  і . Таким чином . Те, що ці значення задовольняють умову легко перевірити простою підстановкою.

 Тепер виберемо    та    та . Маємо квадратне рівняння . Його корені  та . Знову вибираємо лише значення    і . Безпосередньою перевіркою переконуємось, що числа задовольняють умову.

ВІДПОВІДЬ: .

**8. Розв’язати рівняння: **

Розв’язання.

Виділивши повний квадрат в першому підкореневому виразі, отримаємо: . Розглянемо функцію . Тоді вихідне рівняння набуває вигляду . Оскільки функція непарна, дане рівняння приймає вигляд . Оскільки  монотонно зростає, останнє рівняння рівносильне рівнянню , звідки .

 Відповідь: .

9**. Знайти найменшу площу трикутника з вершинами в точках , якщо його третя вершина лежить на параболі **

 **; **

 Розв'язання:

 Для того, щоб площа  була найменшою необхідно, щоб  була найменшою.  - стала, тому відстань  має бути найменшою.



Нехай точка С лежить на параболі 

Відстань , де і- координати точки .

Оскільки ми знаємо, що точка С належить графіку функції , то  .Після застосування похідної знаходимо абсцису точки С: . Переконуємось, що це-точка мінімуму, досліджуючи знак похідної до і після неї.





**Відповідь**:найменша площа  кв.од.

**10. При яких значеннях параметра *а* рівняння: **

 **має єдиний розв’язок?**

Розв’язання. Розглянемо функції:  **** та **.** Графік другої функції –півколо з центром (4;1)і радіусом 1. Легко встановити, що кутові коефіцієнти променів OB і ОА відповідно дорівнюють  і . Кутовий коефіцієнт дотичної ОМ= (це можна знайти за допомогою похідної).

ВІДПОВІДЬ.  або .