Відповіді до завдань ІІ туру

VII обласної Інтернет-олімпіади з математики

2014-2015 н.р.

9 клас

1. Два господарства відправили менш ніж 18 автомобілів на виконання деякого завдання. Друге господарство відправило менше подвоєного числа машин відправлених першим господарством. Якщо б перше господарство відправило на 4 автомобіля більше то число машин, відправлених першим господарством було б менше числа автомобілів відправлених другим господарством. Скільки автомобілів відрядило кожне господарство?

Розв'язання. Нехай x і y - число автомобілів, відправлених відповідно першим і другим господарствами. Отримаємо систему нерівностей:

$$\begin{cases} x+y<18, \\ y<2x, \\ x+4<y. \end{cases}$$

Так як $x+4<y$, $y<2x$, то $x+4<2x$, $x>4$.

Так як $x+4<y$, $y<18-x$, то $x+4<18-x$, звідки $x<7$.

Тоді $4<x<7$, звідси слідує, $x=5$, або $x=6$.

Розглянемо ці два випадки.

1) Нехай $x=5$. Система нерівностей приймає вигляд: $\begin{cases} 5+y<18, \\ y<10, \\ 5+4<y. \end{cases}$

Звідси $9<y<10$, а це не можливо.

2) Нехай $x=6$. Одержимо: $\begin{cases} 6+y<18, \\ y<12, \\ 6+4<y. \end{cases}$

Тоді $10<y<12$, звідси $y=11$.

Відповідь. 6 і 11.

2. Знайти всі дійсні x, при яких дріб $\dfrac{x^2+2x-3}{x^2+1}$ приймає цілі значення.

Розв'язання. Нехай $\dfrac{x^2+2x-3}{x^2+1}=a$, де число а – ціле.

Спростимо даний вираз: $x^2+2x-3=ax^2+a$,

$$(a-1)x^2-2x+(a+3)=0.$$

Розглянемо два випадки.

1) *Нехай* $a = 1$. Тоді останнє рівняння перетворюється в лінійне:
$-2x + 4 = 0, \rightarrow x = 2.$

2) ***Нехай*** $a \neq 1$. Дане рівняння є квадратним. Його дискримінант має бути невід'ємним:
$a^2 + 2a - 4 \geq 0.$ Звідси : $-1 - \sqrt{5} \leq a \leq -1 + \sqrt{5}.$ Дану нерівність необхідно розв'язати в цілих числах. Тобто $a \in \{-3; -2; -1; 0; 1\}$.
Випадок з $a = 1$ ми вже розглянули.
При $a = -3$, маємо $x = 0;\ x = -0{,}5.$
При $a = -2$, $x = -1$; $x = \frac{1}{3}$.
При $a = -1$, $x = \frac{-1 \mp \sqrt{5}}{2}$.
При $a = 0$, то $x = -3;\ x = 1.$

Відповідь. -3; -1; -0,5; 0; $\frac{1}{3}$; 1; 2; $\frac{-1 \mp \sqrt{5}}{2}$.

3. Доведіть , що многочлен $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$, ділиться на многочлен $x + y + z$.
Розв'язання:

Нехай x=-y-z, тоді $(-y-z)^3+y^3+z^3-3(-y-z)zy= -y^3-3y^2z-3yz^2- z^3+y^3+z^3+3y^2z+3yя^2=0$,

отже x=-y-z – є коренем многочлена , отже за теоремою Безу многочлен $x^3+y^3+z^3-3xyz$, ділиться на многочлен $x+y+z$.

4. У вершинах опуклого многокутника $(n > 3)$ записані різні дійсні числа. Кожне число дорівнює добутку чисел записаних у двох сусідніх вершинах. Знайдіть кількість вершин даного многокутника.

Розв'язання:

Якщо одне із записаних чисел становить 0 або 1, тоді решта чисел теж становитимуть о або 1, що суперечить умові. Отже, жодне з написаних чисел не дорівнює нулю та одиниці. Позначимо довільне із них a_1, а наступні числа, які розташовані у вершинах многокутника за рухом годинникової стрілки: a_2, a_3, …, a_n a2, і знову a_1. Тоді $a_2 = a_1 \cdot a_3$; $a_3 = a_2 \cdot a_4$ і т.д. Позначимо $a_1 = x$, $a_2 = y$, отже $a_3=y/x$, $a_4=(y/x):y=1/x$, $a_5=(1/x):(y/x)=1/y$, $a_6=(1/y):(1/x)=x/y$, $a_7=(x/y):(1/y)=x$. Отримали , що $a_1=a_7$, отже розташувати більше шести чисел, у вершинах опуклого многокутника, неможливо. Перевіркою встановлюємо (рис. 1), що чисел є шість. Отже, це шестикутник.

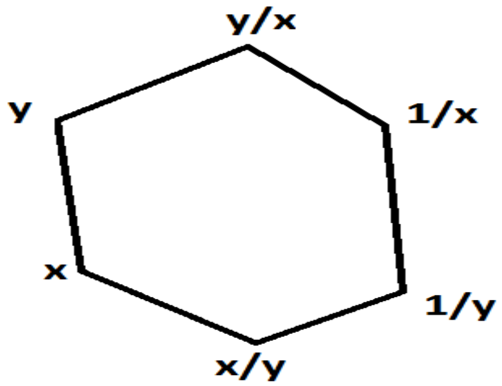

рис 1.

Відповідь: шість вершин.

5. Вулицями міста рухаються 487 тролейбусів. У кожному з них може знаходитися не більше ніж 70 людей. Крім водія, у тролейбусі завжди їде кондуктор. Довести, що обов'язково знайдуться 8 тролейбусів, у яких їде однакова кількість людей.
   Розв'язання. Використаємо метод Діріхле. Найменше в тролейбусі може бути дві людини, а найбільше 70. Тобто маємо 69 «тролейбусів-кліток», у яких їхатиме різна кількість людей(від 2 до 70). А всього в кожний «тролейбус-клітку» буде входити 7 тролейбусів та ще чотири тролейбуси, які стають восьмими у якомусь «тролейбусі-клітці» $(487:69=69\cdot 7+4)$.