Відповіді до завдань ІІ туру

VII обласної Інтернет-олімпіади з математики

2014-2015 н.р.
11 клас

1. Задано функцію $f(x)=x^2-10x+21$. Знайдіть значення x_0, при яких модуль $f(x_0)$ є простим числом.
Розв'язання.
$f(x)=x^2-10x+21=(x-3)(x-7)$, нехай $x=x_0$ шукане число, тоді

$|f(x_0)|=|(x_0-3)(x_0-7)|=|x_0-3|\cdot|x_0-7|$- просте число тому, $\begin{cases}|x_0-3|=1,\\ |x_0-7|-\textit{просте};\end{cases}$ або

$\begin{cases}|x_0-7|=1,\\ |x_0-3|-\textit{просте}.\end{cases}$ Отже $x_0=2$, $x_0=4$, $x_0=6$, $x_0=8$.

Відповідь:{2,4,6,8}

2. Функція $f: R \to R$, для всіх дійсних x задовольняє рівність $f(x+1)=f(x)+2x+1$. Знайти $f(2014)$, якщо $f(0)=0$.

Розв'язання. Послідовно одержимо:

$x=0.\quad f(1)=f(0)+2\cdot 0+1,$

$x=1.\quad f(2)=f(1)+2\cdot 1+1,$

$x=2.\quad f(3)=f(2)+2\cdot 2+1,$

…

$x=2013\quad f(2014)=f(2013)+2\cdot 2013+1.$

Додавши ці рівності, одержимо:

$f(1)+f(2)+...+f(2014)=f(0)+f(1)+f(2)+...f(2013)+2\cdot(0+1+...+2013)+2014$,

Отже, $f(2014)=f(0)+2\cdot(0+1+...+2013)+2014=2013\cdot 2014+2014=2014^2$.
Відповідь. $f(2014)=2014^2$.

3. Розв'яжіть рівняння: $[x]\{x\}+x=2\{x\}+10$.

Як відомо, $x=[x]+\{x\}$.
Тоді дане рівняння можна представити у вигляді:
$[x]\{x\}+[x]+\{x\}=2\{x\}+10$;
$[x]\{x\}-2\{x\}+[x]+\{x\}-10=0$;
$[x]\{x\}-\{x\}+[x]-10=0$;
$\{x\}([x]-1)+[x]-10=0$;
$\{x\}=\dfrac{10-[x]}{[x]-1}$;

Оскільки $0 \le \{x\} \langle 1$, то $\quad 0 \le \frac{10-[x]}{[x]-1} \langle 1$;

Ця нерівність рівносильна системі:

$$\begin{cases} \frac{10-[x]}{[x]-1} \ge 0, \\ \frac{10-[x]}{[x]-1} \langle 1; \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{[x]-10}{[x]-1} \le 0, \\ \frac{10-[x]-[x]+1}{[x]-1} < 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} 1 < [x] \le 10, \\ \left[\begin{array}{l} [x] < 1, \\ [x] > 5{,}5; \end{array} \right. \end{cases}$$

$5{,}5 < [x] \le 10;$

$[x] \in \{6,7,8,9,10\}$

Якщо $[x] = 6,$ то $\{x\} = \frac{10-6}{6-1} = \frac{4}{5};$

$x = [x] + \{x\} = 6 + \frac{4}{5} = 6\frac{4}{5}$

Якщо $[x] = 7,$ то $\{x\} = \frac{10-7}{7-1} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2};$

$x = [x] + \{x\} = 7 + \frac{1}{2} = 7\frac{1}{2}$

Якщо $[x] = 8,$ то $\{x\} = \frac{10-8}{8-1} = \frac{2}{7};$

$x = [x] + \{x\} = 8 + \frac{2}{7} = 8\frac{2}{7}$

Якщо $[x] = 9,$ то $\{x\} = \frac{10-9}{9-1} = \frac{1}{8};$

$x = [x] + \{x\} = 9 + \frac{1}{8} = 9\frac{1}{8}$

Якщо $[x] = 10,$ то $\{x\} = \frac{10-10}{10-1} = 0;$

$x = 10$

Відповідь: $x \in \left\{6\frac{4}{5}; 7\frac{1}{2}; 8\frac{2}{7}; 9\frac{1}{8}; 10\right\}.$

4. На дошці написано числа 1, 2, 3, …, 2014. Дозволяється витерти будь-які два числа, а замість них записати їх різницю. Внаслідок багатократного повторення цієї операції на дошці залишиться одне число. Довести, що це число не може бути 0.

Розв'язання. Сума всіх даних чисел є числом непарним:

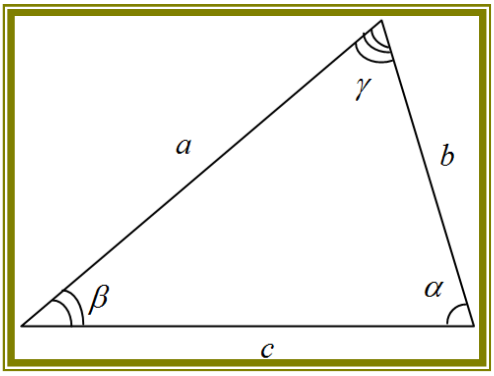
$$1+2+3+\ldots+2014 = \frac{1+2014}{2} \cdot 2014 = 2015 \cdot 1007.$$

Під час заміни двох чисел їх різницею парність суми чисел, що залишаються, не змінюється – є інваріантом. Тому на дошці залишиться непарне число. Отже, нулем бути не може.

5. У трикутнику ABC, один з кутів якого дорівнює 48^0, довжини сторін задовольняють співвідношення $(a-c)(a+c)^2+bc(a+c)=ab^2$. Виразіть у градусах величини двох інших кутів цього трикутника.

Розв'язання.

Перетворимо дану рівність до вигляду і розвяжемо як квадратне рівняння відносно b



$$ab^2-bc(a+c)-(a-c)(a+c)^2=0$$

$$D=c^2(a+c)^2+4a(a-c)(a+c)^2=$$
$$=(a+c)^2\left(c^2-4ac+4a^2\right)=$$
$$=(a+c)^2(c-2a)^2$$

$$\left[\begin{array}{l} b_1=\dfrac{c(a+c)-(a+c)(c-2a)}{2a}=\dfrac{2a(a+c)}{2a}=a+c \\ b_2=\dfrac{c(a+c)+(a+c)(c-2a)}{2a}=\dfrac{2(c-a)(a+c)}{2a}=\dfrac{c^2-a^2}{a} \end{array}\right.$$

Перший корінь $b=a+c$ не задовольняє нерівність трикутника.

Отже $b=\dfrac{c^2-a^2}{a}$. Звідки $\boxed{c^2-a^2=ab}$ (1)

Використаємо теорему косинусів для даного трикутника

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma$$

$$c^2-a^2=b^2-2ab\cos\gamma$$

$$ab=b^2-2ab\cos\gamma$$

$$a=b-2a\cos\gamma$$

$$\cos\gamma=\frac{b-a}{2a}=\frac{b}{2a}-\frac{1}{2}$$

2) $a^2=c^2+b^2-2cb\cos\alpha$

$$c^2-a^2=2cb\cos\alpha-b^2$$

$$ab=2cb\cos\alpha-b^2$$

$$a=2c\cos\alpha-b$$

$$\cos\alpha = \frac{a+b}{2c}$$

Оскільки $\frac{a+b}{2c} > 0$, то α - гострий.

З рівності (1), маємо

$$c = \sqrt{ab + a^2}$$

$$\cos\alpha = \frac{a+b}{2c} = \frac{a+b}{2\sqrt{ab+a^2}} = \sqrt{\frac{a+b}{4a}}$$

$$\cos^2\alpha = \frac{a+b}{4a} = \frac{1}{4} + \frac{b}{4a}$$

$$2\cos^2\alpha == \frac{1}{2} + \frac{b}{2a}$$

Знайдемо різницю $2\cos^2\alpha = \frac{1}{2} + \frac{b}{2a}$ та $\cos\gamma = -\frac{1}{2} + \frac{b}{2a}$.

$$2\cos^2\alpha - \cos\gamma = 1$$

$$\cos\gamma = 2\cos^2\alpha - 1$$

$$\cos\gamma = \cos 2\alpha$$

α, γ - кути трикутника, то $\gamma = 2\alpha$

1) $\alpha = 48^0$, тоді $\gamma = 96^0, \beta = 36^0$;

2) $\gamma = 48^0$, тоді $\alpha = 24^0, \beta = 108^0$;

3) $\beta = 48^0$, тоді $\alpha = 44^0, \gamma = 88^0$.