Відповіді до завдань І туру
VII обласної Інтернет-олімпіади з математики 2014-2015 н.р.
9 клас

1. Розв‘яжіть рівняння: $[20x]+14[x]=2014$, де $[x]$ - ціла частина числа x.

Розв’язування: Позначимо $[x]=k, k\in Z$. Тоді отримаємо систему:

$$\begin{cases} k\le x\le k+1, \\ [20x]+14[x]=2014. \end{cases}$$

$\begin{cases} 20\kappa\le 20x<20\kappa+20, \\ [20x]=2014-14\kappa. \end{cases}$ $\begin{cases} 20\kappa\le 20x<20\kappa+20, \\ 2014-14\kappa\le 20x<2015-14\kappa. \end{cases}$ Тому маємо

$\begin{cases} 20\kappa<2015-14\kappa, \\ 2014-14\kappa<20\kappa+20. \end{cases}$ $\begin{cases} 34\kappa<2015, \\ 34\kappa>1994. \end{cases}$ к=59, тому отримаємо:

$\begin{cases} 1180\le 20x<1200, \\ 1188\le 20x<1189. \end{cases}$ $\begin{cases} 59\le x<60, \\ 59{,}4\le x<59{,}45. \end{cases}$ отже х $\epsilon[59{,}4; 59{,}45)$

Відповідь: х $\epsilon[59{,}4; 59{,}45)$

2. Автослюсар отримав завдання на виготовлення кількох комплектів деталей для восьмициліндрових автомобільних двигунів. Слюсар підрахував, що коли йому вдасться підвищити продуктивність праці на 0,1дет/год, то він зможе виконати завдання на 12 год. раніше строку, а якщо ще на 0,5 дет./год, то виконає завдання на 36 год. раніше строку. Скільки деталей потрібно виготовити слюсарю?

   Розв’язування: Нехай нормативний час, потрібний на виконання завдання - х год, а нормативна продуктивність праці-у дет/год. Маємо систему рівнянь: $\begin{cases} (x-12)(y+0{,}1)=xy, \\ (x-36)(y+0{,}6)=xy. \end{cases}$ $\begin{cases} 0{,}1x-12y=1{,}2 \\ 0{,}6x-36y=21{,}6 \end{cases}$; де х=60, у=0,4.

   Отже необхідно виготовити 24 деталі.

   Відповідь: 24 деталі.

3. Розв’яжіть систему рівнянь, якщо у та z – прості числа: $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{z}, \\ x=yz. \end{cases}$

Розв’язання. З того, що $x=yz$, випливає, що не тільки у та z – прості числа, а й х має бути натуральним числом. Підставимо в перше рівняння замість х вираз yz.

$\frac{1}{yz}+\frac{1}{y}=\frac{1}{z}$, $\frac{1+z}{yz}=\frac{1}{z}$, $1+z=y$ (оскільки y>0 та z>0). Отже y та z сусідні натуральні числа, тобто одне з них парне, а серед простих чисел парне лише 2. Тому $z=2$, $y=3$, $x=6$. **Відповідь**: (6; 3; 2).

4. Нехай a, b, c – сторони трикутника. Доведіть нерівність:

$$a^3+b^3+3abc>c^3$$

Розв’язання. Скористаємось нерівністю трикутника $a+b>c$ та $a^2-ab+b^2>0$.

$$a^3+b^3+3abc=(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)+3abc>c\left(a^2-ab+b^2\right)+3abc=$$
$$=c\left(a^2+2ab+b^2\right)=c(a+b)^2>c\cdot c^2=c^3.$$

5. Є ланцюжок з n (n>6) сосисок. Два коти по черзі перегризають по одній перемичці між сосисками і з'їдають утворені одинарні сосиски. Виграє той кіт, який з'їсть більше сосисок. Опишіть виграшну тактику кота-переможця.

Розв'язання. Якщо n – непарне, то виграє другий кіт, якщо ж n – парне, то виграє перший кіт. Нехай n – непарне, тобто n=2k+1. Занумеруємо сосиски числами від 1 до n. Сосиску з номером k+1 назвемо центральною. Другому коту кожним своїм ходом потрібно перегризати перемичку симетричну (відносно центральної сосиски) тій, яку перегриз на попередньому кроці перший кіт. Тоді він з'їсть сосисок не менше, ніж перший. Причому перший кіт при такій грі не зможе з'їсти центральну, бо її кінці (перемички) симетричні один одному відносно цієї сосиски. Отже, другий кіт з'їсть не менше k+1 сосиски і виграє.

Нехай n – парне, тобто n=2k. Занумеруємо сосиски числами від 1 до n. В такій ситуації першому коту потрібно з'їсти одну з крайніх сосисок. Тоді перед другим котом виявиться непарна кількість сосисок, а це вже описана програшна тактика для такого кота. Тобто далі першому потрібно відповідати симетричними (відносно центральної сосиски) ходами. При такій стратегії перший кіт з'їсть не менш як на дві сосиски більше, ніж другий.

6. На дошці записані числа 1001^2, 1002^2, 1003^2, ..., 2013^2. На кожному кроці дозволяється стерти будь-які три числа *a*, *b*, *c* і записати замість них число $\frac{a}{3}$ $(a\le b\le c)$. Доведіть, що коли після серії таких операцій на дошці залишиться лише одне число, то воно буде менше за 1992.

Розв'язання. Якщо $(a\le b\le c)$, то $\frac{3}{a}\ge\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$. Тому при вказаних діях сума всіх чисел, обернених до написаних на дошці не буде зменшуватися. Коли залишиться одне число S, то для нього:

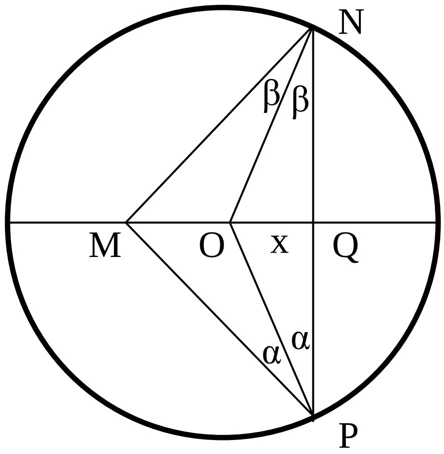
$$\frac{1}{S}\ge\frac{1}{1001^2}+\frac{1}{1002^2}+\ldots+\frac{1}{2013^2}>\frac{1}{1001\cdot1002}+\frac{1}{1002\cdot1003}+\ldots+\frac{1}{2013\cdot2014}=$$
$$=\frac{1}{1001}-\frac{1}{1002}+\frac{1}{1002}-\frac{1}{1003}+\ldots+\frac{1}{2013}-\frac{1}{2014}=\frac{1}{1001}-\frac{1}{2014}.$$

Тому $S<\left(\frac{1}{1001}-\frac{1}{2014}\right)^{-1}$, і залишається підрахувати, що останній вираз менший за 1992.

7. В деякій точці круглого більярду радіусу *R* на відстані *a* від його центра знаходиться кулька. В яку точку борту потрібно влучити кулькою, щоб вона двічі відбившись від борту, повернувся в початкову точку? Розмірами кульки знехтувати.

Розв'язання. Нехай в початковий момент кулька знаходилась в точці М.

Оскільки кут падіння дорівнює куту відбивання, то $\angle MNO = \angle ONP = \angle NPO = \angle OPM$, $\alpha = \beta$, $2\alpha = 2\beta$ і трикутника MNP – рівнобедрений. Отже, $MQ \perp NP$ і положення точки N визначається відстанню $OQ = x$. За властивістю бісектриси внутрішнього кута трикутника маємо $\frac{OQ}{MO} = \frac{NQ}{NM}$ або $\frac{OQ^2}{MO^2} = \frac{NQ^2}{NM^2}$. Підставимо відомі значення $\frac{x^2}{a^2} = \frac{R^2 - x^2}{a^2 + R^2 + 2ax}$, звідки $x^2a^2 + x^2R^2 + 2ax^3 - a^2R^2 + a^2x^2 = 0$.



$2ax^3 + 2x^2a^2 + x^2R^2 - a^2R^2 = 0,$

$2ax^2(a + x) + R^2(x^2 - a^2) = 0,$

$(a + x)(2ax^2 + R^2x - R^2a) = 0,$

Оскільки $a + x \neq 0$, то $2ax^2 + R^2x - R^2a = 0$,

звідки $x = \frac{-R^2 + \sqrt{R^4 + 8a^2R^2}}{4a} = \frac{R}{4a}\left(\sqrt{8a^2 + R^2} - R\right).$

8. Для всіх a розв'яжіть рівняння в множині дійсних чисел:

$$\left(1 + x + x^2\right)^2 = \frac{a+1}{a-1}\left(1 + x^2 + x^4\right).$$

Розв'язання. $1 + x^2 + x^4 = \left(1 + 2x^2 + x^4\right) - x^2 = \left(1 + x^2\right)^2 - x^2 = \left(1 + x + x^2\right)\left(1 - x + x^2\right);$

$$\left(1 + x + x^2\right)^2 - \left(1 + x + x^2\right)\left(1 - x + x^2\right)\frac{a+1}{a-1} = 0.$$

$$\left(1 + x + x^2\right)\left(1 + x + x^2 - \left(1 - x + x^2\right)\frac{a+1}{a-1}\right) = 0.$$

Далі маємо два рівняння: перше рівняння $1 + x + x^2 = 0$ в множині дійсних чисел розв'язків немає.

Друге рівняння $1 + x + x^2 - \left(1 - x + x^2\right)\frac{a+1}{a-1} = 0$ має розв'язком $x = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4}}{2}$, яке має розв'язки при $|a| \geq 2$.

При $|a| < 2$ в множині дійсних чисел рівняння розв'язків не має.