Відповіді до завдань І туру
VII обласної Інтернет-олімпіади з математики 2014-2015 н.р.

11 клас

1. **Розвязати рівняння** $\sqrt{x^2+2x+1}+|x-2014|+y^{2014}=2015.$

Розв'язання. Перетворимо рівняння до вигляду $|x+1|+|x-2014|=2015-y^{2014}$,

Права частина рівняння додатна, а тому і ліва повинна бути додатною: $2015-y^{2014}\geq 0$. З іншого боку, оскільки $y^{2014}\geq 0$, то $2015-y^{2014}\leq 2015$.
Оцінимо ліву частину рівняння: $|x+1|+|x-2014|\geq|(x+1)-(x-2014)|=2015$

Отже $\begin{cases}|x+1|+|x-2014|\geq 2015,\\ 2015-y^{2014}\leq 2015;\end{cases}$ рівність наступає за умови , рівності обох частин 2015.

Відповідь. $y=0$, $x\in[-1;2014]$

2. **Довести нерівність** $\sqrt{x+\sqrt[3]{y+\sqrt[4]{z}}}\geq\sqrt[32]{xyz},\quad x\geq 0,\quad y\geq 0,\ z\geq 0.$

Доведення. Підкореневі вирази лівої частини нерівності перетворимо так, щоб можна було застосовувати нерівність Коші спочатку у випадку, якщо $n=5$, потім для $n=15$. Разом з цим послабимо нерівність завдяки очевидним нерівностям $\frac{5^3}{4^4}>1$ і $\frac{16^{16}}{15^{15}}>1;$

$$\sqrt{x+\sqrt[3]{y+\sqrt[4]{z}}}=\sqrt{x+\sqrt[3]{y+4\left(\frac{1}{4}\sqrt[4]{z}\right)}}\geq\sqrt{x+\sqrt[3]{5\sqrt[5]{\frac{yz}{4^4}}}}>$$

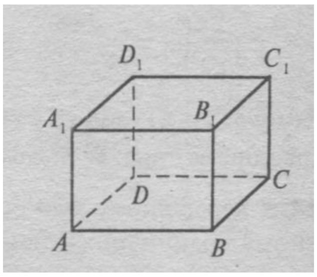
$$>\sqrt{x+\sqrt[15]{yz}}=\sqrt{x+15\left(\frac{1}{15}\sqrt[15]{yz}\right)}\geq\sqrt{16\sqrt[16]{\frac{xyz}{15^{15}}}}>\sqrt[32]{xyz}.$$

3. *Знайти суму коренів рівняння:* $\left|\sqrt{2}|x|-\sqrt{5}\right|=\frac{1}{\sqrt{13}}x^2+\sqrt{11}|x|$.

Розв'язання. Корені даного рівняння існують. **<u>(обґрунтувати існування коренів рівняння.)</u>**
Оскільки $|-x|=|x|$ і $(-x)^2=x^2$, то для кожного розв'язку x рівняння $\left|\sqrt{2}|x|-\sqrt{5}\right|=\frac{1}{\sqrt{13}}x^2+\sqrt{11}|x|$ розв'язком рівняння буде ще й $-x$. Сума протилежних чисел дорівнює 0. Тоді сума коренів цього рівняння буде дорівнювати 0.
Відповідь:0.

4. **Яким є найбільший діаметр кулі, якщо в коробці розмірами $24 \times 24 \times 24$см вміщується дев'ять таких куль?**

Розв'язання. Коробка має форму куба. Найбільш щільне заповнення коробки дев'ятьма кулями буде в тому випадку, коли найбільша кількість куль дотикається до стінок коробки. Завдяки симетрії куба це буде в тому випадку, коли в кожному з восьми «кутів» куба буде розміщена куля, а дев'ята куля буде знаходитися посередині куба.



Якщо «розрізати» коробку, щільно наповнену дев'ятьма кулями, площиною, що проходить через протилежні бічні ребра, то дістанемо фігуру, зображену на рис 2.

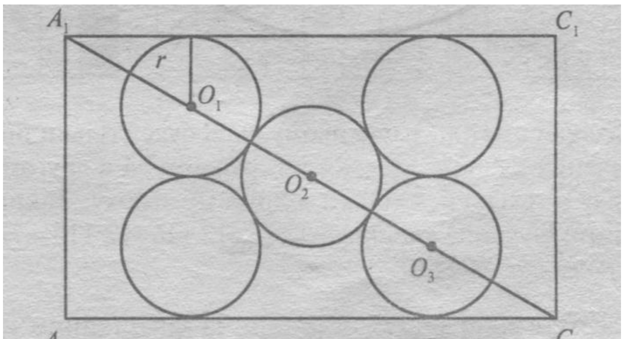


Рис. 2

На ньому зображено прямокутник з розмірами $24 \times 24\sqrt{2}$ і п'ять рівних кругів радіусів r, які дотикаються один до одного, а також до верхньої і нижньої сторін прямокутника. Їхні центри розміщені на діагоналі A_1C. Відстань A_1O_1 є відстанню від центра кулі до вершини «кута», в якому знаходиться куля. Неважко пересвідчитися, що $A_1O_1 = \sqrt{3}r$.

З умови щільного розміщення кругів і властивостей взаємного розміщення кіл маємо рівність $A_1C = 4r + 2\sqrt{3}r = 2r\left(2+\sqrt{3}\right)$.

З прямокутного трикутника AA_1C знайдемо: A_1C : $A_1C = 24\sqrt{3}$.

Маємо рівняння $2\left(2+\sqrt{3}\right)r = 24\sqrt{3}$. $r = \dfrac{12\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = 12\sqrt{3}\left(2-\sqrt{3}\right)$.

Таким чином, шуканий діаметр дорівнює $24\sqrt{3}\left(2-\sqrt{3}\right)$см.

Наближено це складає 11,3 см. Це значення мало відрізняється від 12см, яке відповідає щільному розміщенню в кубі розмірами $24\times24\times24$см восьми куль.

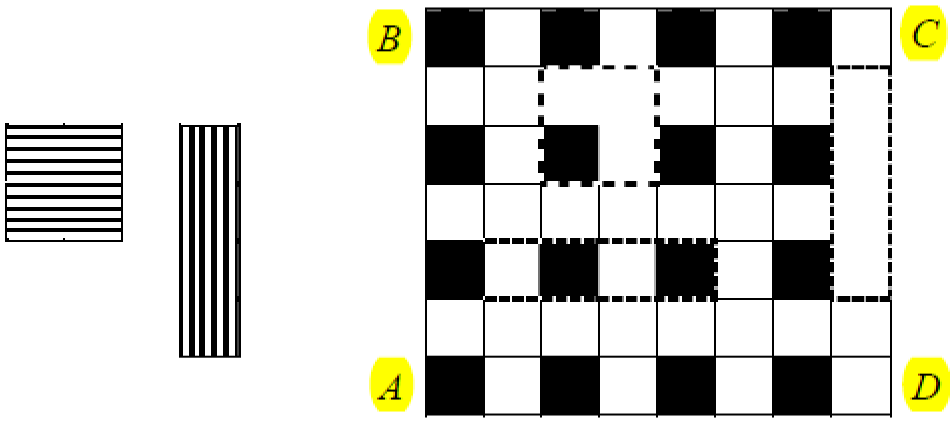
Відповідь. $24\sqrt{3}\left(2-\sqrt{3}\right)\approx 11{,}3$ см.

5. Чи існує такий многочлен $f(x)=x^3+ax^2+bx+c,\quad |c|\le 2014$, усі три корені якого – цілі числа та $|f(34)|$ - просте число?

Розв'язання. Нехай $f(x)=x^3+ax^2+bx+c=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$, де α,β,γ - цілі числа. Тоді $|f(34)|=|(34-\alpha)(34-\beta)(34-\gamma)|$ - просте. Тому, не порущуючи загальності розгляду, можемо вважати, що $|34-\alpha|=|34-\beta|=1$ і $|34-\gamma|$ - просте, звідки $\alpha,\beta\ge 33$. Найближчі прості до 34 – це 31 та 37, тому $|\gamma|\ge 3$. Звідси $|c|=|\alpha\beta\gamma|\ge 33\times33\times3=3267>2014$. суперечливість, яка доводить що такого многочлена не існує.

6. Дно прямокутної коробки викладено плитками розміром 2×2 та 1×4. Плитки висипали з коробки і загубили одну плитку 2×2. Замість неї дістали плитку розміром 1×4. Доведіть, що викласти тепер дно коробки не вдасться.

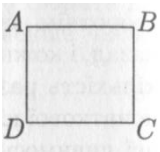
Розв'язання. За умовою дно коробки (у формі прямокутника) можна викласти за допомогою плиток розміром 2×2 та 1×4.

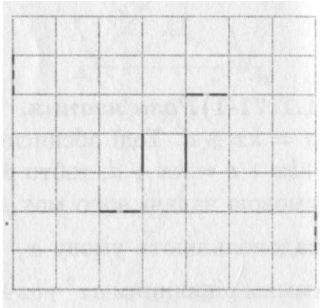


Розфарбуємо прямокутну ділянку *ABCD* (вказане дно) так, як показано на рисунку. Тоді при довільному розташуванні (укладці) плиток
1) кожна плитка розміром 2×2 містить точно 1 чорну і 3 білі клітинки;
2) кожна плитка розміром 1×4 містить
або 2 чорні та 2 білі клітинки, або ж 0 чорних і 4 білих клітинки.
Тому парність числа чорних клітинок дна коробки співпадає з (визначається) парністю числа плиток розміром 2×2.
Оскільки при заміні плитки розміром 2×2 на плитку розміром 1×4 парність числа плиток розміром 2×2 змінюється, то за допомогою нового набору плиток дно вказаної прямокутної коробки викласти не вдасться.

7. Дано квадрат 2015×2015розбитий на одиничні квадратики. Два гравці по черзі зафарбовують у синій колір одиничні відрізки, які є межами одиничних квадратів, що розташовані всередині чи на межі даного квадрата та ще не були зафарбовані. Перемагає той гравець, після ходу якого вперше з'являється одинична клітинка, усі чотири сторони якої зафарбовані у синій колір. Хто перемагає у цій грі при правильній грі обох – той, хто починає чи той, хто ходить другим?

Розв'язання. другий гравець притримується такої стратегії у своїх ходах:





1) Якщо він своїм ходом може пофарбували останню сторону якої-небудь клітини, він це робить і тим самим перемагає;
2) На хід першого другий відповідає центральносиметричним чином,на рис. Показані відповідні центральносиметричні ходи. Таким чином маємо, що по-перше гра обов'язково закінчиться перемогою одного з гравців; по- друге другий гравець завжди може зробити хід, який задовольняє наведеній вище стратегії. Якщо припустити, що виграє перший гравець, то він своїм ходом фарбує четвертий відрізок у деякого одиничного квадрата. Припустимо, що це відрізок AB. Перед цим був хід другого, він повинен був зафарбувати один з відрізків BC,CD та DA. Якщо він їх не фарбував, то вони вже зафарбовані, а тому він повинен сам зафарбувати своїм ходом відрізок AB та закінчити гру на попередньому ході. Таким чином, він з своєї стратегії повинен фарбувати один з відрізків BC,CD та DA. Але це означає, що центрально симетричний квадрат $A'B'C'D'$ після ходу першого має зафарбованими сторони $B'C'$, $C'D'$ та $A'D'$. Тому другий повинен (відповідно до стратегії) зафарбувати відрізок $A'B'$ і виграти гру, а не фарбувати один з відрізків BC,CD та DA. Неважко переконатись, що й для центрального квадрата стратегія спрацьовує.

Відповідь. Той, хто ходить другим.

8. В опуклому чотирикутнику *ABCD* відомі сторони $AB = BC = 2$, $CD = 2\sqrt{3}$, $DA = 2\sqrt{5}$. Нехай M, N – середини діагоналей AC і BD відповідно та $MN = \sqrt{2}$. Визначити площу чотирикутника *ABCD.*

Розв'язання. Побудуємо точку P таким чином, щоб чотирикутник $ABCP$ був паралелограмом, з умови задачі він є ромбом. M- точка перетину його діагоналей, тому M- середина BP, оскільки N- середина BD, то MN- середня лінія ΔBPD, тобто $PD = 2MN = 2\sqrt{2}$, оскільки $PC^2 + PD^2 = 2^2 + \left(2\sqrt{2}\right)^2 = 12 = \left(2\sqrt{3}\right)^2 = CD^2$, тобто ΔCPD- прямокутний. З теореми косинусів маємо: $\cos\angle APD = \dfrac{AP^2 + PD^2 - AD^2}{2 \cdot AP \cdot PD} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Звідси $\angle APD = 135^0$. далі можливі два випадки розташування точок A і C відповідно прямої PD. Якщо ці точки розташовані по різні боки від прямої, то площа складається з суми площ паралелограма $ABCP$, ΔCPD та ΔAPD. Якщо по різні боки, то треба площу останнього трикутника відняти. $\angle APC = 360^0 - \angle APD - \angle DPC = 135^0$. Таким чином шукана площа складає: $AP \cdot CP \sin\angle APC + \dfrac{1}{2} AP \cdot DP \sin\angle APD + \dfrac{1}{2} CP \cdot DP \sin\angle APD = 2 + 4\sqrt{2}$.

З іншого боку, якщо точка A і C по один бік відносно прямої PD, то $\angle BPC = 180^0 - \angle APC = 180^0 - \left(\angle APD - \angle DPC\right) = 135^0$ і $\angle BCP + \angle PCD = 135^0 + \angle PCD$. Оскільки $\angle CPD = 90^0$ та $PC < PD$ маємо, що $\angle PCD > 45^0$, тому $\angle BCP + \angle PCD > 135^0 + 45^0 = 180^0$. Це означає, що точки P і C лежать по один бік від прямої BD. З урахуванням попереднього припущення щодо розташування точок A і C .

Точки *A,B,C і D не можуть утворювати опуклий чотирикутник.*